Domácí úkol č. 6

Zadáno: 18. 11.
Deadline: 25. 11.

Nalezněte následující primitivní funkce na maximálních možných intervalech. Určete i tyto intervaly.

1.
$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x$$

2.
$$\int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

Hint: Eulerova substituce je nejtěžší, zkuste vymyslet jinou, která využije vztahu $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Řešení

1.
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} t & = \sin x \\ \mathrm{d}t & = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| \\
&= \int \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t\,\mathrm{d}t}{(t+1)(t^2-t+1)} \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{t+1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\int \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + C \\
&= -\frac{1}{3}\ln|\sin x+1| + \frac{1}{6}\ln|\sin^2 x-\sin x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sin x-1}{\sqrt{3}}\right) + C
\end{aligned}$$

pro $x \in (-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \sqrt{1-x^2} & = \cos t \\ x & = \sin t \\ \mathrm{d}x & = \cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \operatorname{tg} t + C = \operatorname{tg}(\arcsin x) + C \\
&= \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C
\end{aligned}
$$

pro $x \in (-1, 1)$.